UDK 37.025:510(075.2)
159.953.5:51(075.2)

Иновације у настави, XXXIV, 2021/1, стр. 30–43
doi: 10.5937/inovacije2101030D

Рад примљен: 13. 10. 2020.
Рад прихваћен: 21. 12. 2020.

Оригинални научни рад

Милана М. Дабић Боричић, Маријана Ж. Зељић[1]

Универзитет у Београду, Учитељски факултет, Република Србија

Моделовање еквиваленције математичких израза у почетној настави

Резиме: *Један од појмова који је у литератури препознат као кључан за разумевање алгебарских идеја је појам еквивалентности израза. За разумевање наведеног појма важан је контекст који се користи као основа за развијање значења, као и језик којим се исказују генерализације. Циљ рада је двојак: а) испитати да ли контекст текстуалног задатка и активности моделовања утичу на разумевање трансформације израза у еквивалентне форме; б) утврдити да ли на разумевање еквивалентности израза утиче ниво апстрактности израза (алгебарски или аритметички) који се користе. Истраживање је квазиексперименталног дизајна са две експерименталне и контролном групом. Узорак чини 148 ученика четвртог разреда. Постојање статистички значајних разлика између ученика експерименталних и контролне групе упућује да процес моделовања утиче на развијање појма еквивалентности израза. У овом истраживању нису се показале разлике у резултатима ученика који су били подучавани помоћу алгебарских, односно аритметичких израза. Ово имплицира да разумевање еквивалентности које је развијано кроз процес моделовања није у вези са нивоом апстрактности математичког језика који се користи, већ да на основу разумевања значења појма ученици са подједнаком успешношћу могу трансформисати и аритметичке и алгебарске изразе.*

Кључне речи*: еквиваленција математичких израза, моделовање, математички симболизам, алгебра.*

1 marijana.zeljic@uf.bg.ac.rs

2 Резултати истраживања преузети су из дисертације *Методички аспекти формирања алгебарских закона у почетној настави математике* Милане Дабић Боричић, а теоријски део је допуњен и модификован. Дисертација је одбрањена на Учитељском факултету у Београду.

3 Рад представља резултат рада на пројекту „Концепције и стратегије обезбеђивања квалитета базичног образовања и васпитања“, број 179020, Учитељског факултета у Београду.

Увод

Последњих деценија истраживањима математичког образовања скренута је посебна пажња на значај развоја алгебарских идеја у основношколској математици, као и на разумевање тешкоћа које ученици имају при почетном учењу алгебре. Један од доминантних проблема које ученици имају при преласку са аритметике на алгебру јесте недовољно и ограничено разумевање еквиваленције израза (Chaiklin & Lesgold, 1984; Linchevski & Livneh, 1999; Kieran et al., 2013). Еквиваленција израза заснива се на познавању и примени правила аритметике и својстава операција. Међутим, бројевне једнакости које изражавају својства операција и општа правила аритметике ученици често схватају искључиво као команду за рачунање вредности израза (Booth, 1988; Sfard, 1991; Linchevski & Livneh, 1999; Malara & Iaderosa, 1999; Kieran, 2004; Linchevski & Livneh, 2007; Ilić, Zeljić, 2017). Тако већина ученика развија само процедурално разумевање, које инхибира њихове способности за алгебарско мишљење (Sfard & Linchevski, 1994; Crowley et al. 1994; Kieran 1996; Kieran, 2004). Осим савладавања вештине рачунања, циљ основношколске аритметике треба да буде развијање способности за изражавање и оправдавање генерализација (Blanton & Kaput, 2005). У овом раду анализирамо карактеристике и ефекте наставних модела које смо користили за увођење еквивалентних облика израза у почетној настави (4. разред). Модели учења заснивају се на процесу математичког моделовања. Будући да не постоји консензус о апстрактности израза који би требало да се користе (бројевни/аритметички или словни/алгебарски), дизајнирали смо два експериментална модела – у првом се појам еквивалентности уводи коришћењем аритметичких, а у другом алгебарских израза. На овај начин истраживали смо два питања: 1) да ли употреба аритметичких израза (када ученици могу да израчунају њихову вредност) инхибира уопштавање еквиваленције и 2) да ли употреба алгебарских израза доводи до формализма и недовољног разумевања значења екваваленције израза.

Еквиваленција бројевних и словних израза

Идентификовање еквивалентног облика израза сматра се важним задатком у развоју алгебарског мишљења. На прелазу из аритметике у алгебру ученици треба да науче да се изрази и једнакости могу посматрати као процес и као објекат, тј. да развију двоструку процедурално-структуралну концепцију (Sfard, 1991; Kieran, 1992). Уколико се изрази схвате као процеси (рачунање вредности израза), а не и као објекти који имају своје значење, ученици ће алгебарске изразе разумети као процедуре евалуације, а не као менталне ентитете којима се може манипулисати. Под термином структурално знање у аритметици и алгебри подразумева се могућност да се идентификују све еквивалентне форме израза, а термин осећај за структуру подразумева „креативну и флексибилну могућност употребе еквивалентних израза“ (Linchevski & Livneh, 1999: 191). Питање да ли поучавање треба започети користећи бројевне или словне изразе је део ширег питања: како приближити језик симбола ученицима и како развити значење тих симбола. У раду Радне групе за рану алгебру 12. конгреса ICMI „The Future of the Teaching & Learning of Algebra“ издвојила су се два става о утицају алгебарског симболизма (Lins & Kaput, 2001: 53): први став заступају истраживачи који сматрају да се алгебра гради на ономе што је већ алгебарско у размишљању млађе деце, са нарочитом пажњом на њиховом нумеричком и аритметичком расуђивању, а други став заступају истраживачи који сматрају да се промене у размишљању ученика постижу ако им се понуде механизми – какве су алгебарске нотације – који им омогућавају да раде на вишем нивоу општости. У претходним истраживањима идентификација еквивалентних облика израза најчешће је вршена проценом еквиваленције нумеричких (аритметичких) израза. Постоје два разлога због којих се ови изрази сматрају погодним за увођење идеје о еквиваленцији. С једне стране, контекст бројева је познат ученицима (Linchevski & Livneh, 1999), а с друге, манипулација бројевним изразима без рачунања њихове вредности захтева разумевање структуре израза (Subramaniam & Banerjee, 2011). Субраманијам и Банерје (Subramaniam & Banerjee, 2004) сматрају да су изрази и њихова еквиваленција основни појмови за развој осећаја за структуру у аритметици и преношења знања из аритметике у алгебру. Проблем у раду са бројевним изразима јесте потреба ученика да елементе повезане операцијским знаком замене трећим елементом – резултатом рачунања. У супротном, ученици сматрају да постоји „недостатак решења" (Hercovics & Linchevski, 1994). Аутори Фуџи и Стивенс (Fuji & Stephens, 2001) указују на то да би се бројеви у нумеричким изразима могли третирати као квазипроменљиве, тј. ученици у њиховој студији (осам и девет година) могли су игнорисати конкретне бројеве у изразима и остављати изразе „недовршенима" – без рачунања вредности израза. Међутим, да би се радило са квазипроменљивим, пажња ученика треба да је фокусирана на структуру израза, а не на израчунавање његове вредности.

Други начин увођења еквиваленције израза је помоћу алгебарских израза. Малара и Ијадероса (Malara & Iaderosa, 1999) истакли су проблем који се огледа у томе да ученици, када користе слова уместо бројева, често не препознају својства која су знали у аритметици. Ови аутори верују да би рано увођење променљиве и алгебарских аспеката у аритметику могло касније побољшати разумевање алгебарске нотације. Резултати другог истраживања (Stacey & MacGregor, 1999) потврдили су да ученици у раду са словним изразима не примењују знања о операцијама које су савладали на бројевима. Прелаз са бројевних израза на манипулацију словима у алгебарским изразима посматра се као когнитивни јаз, због промене перспективе у којој се операције посматрају као инструменти рачунања у аритметици, док су у алгебри то инструменти трансформација (Cerulli & Mariotti, 2001). Постоје истраживања која заступају став да потешкоће које ученици имају у алгебри нису условљене апстрактношћу алгебарског језика, већ суштинским неразумевањем алгебарских својстава у аритметици (Booth, 1988; Lee & Wheeler, 1989; Malara & Navara, 2001). Другим речима, тешкоће које ученици имају у алгебри нису повезане само са алгебром. Оне су повезани са потешкоћама које су остале нерешене у аритметици (Booth, 1988). Ученици који раде у аритметичком референтном оквиру обично не виде релацијске аспекте операција, њихов фокус је на рачунању (Kieran, 2004). Ауторка сматра да је потребно ставити фокус на релације, операције и оцењивање еквивалентности израза који се базирају на својствима, а не на нумеричкој евалуацији.

Структура израза. Да би постигли боље разумевање појмова у алгебри, ученици морају да развију разумевање структурних својстава бројевног система (Liebenberg et al., 1999; Linchevski & Livneh, 1999; Linchevski & Livneh, 2007). Ако ученици науче аритметичке процедуре без разумевања правила која леже у основи аритметике, неће моћи да пређу на алгебарски начин размишљања (Lee & Wheeler, 1989). Један од начина за проналазак одговора на питање зашто је алгебра за ученике „тешка" јесте анализирање грешака ученика и откривање разлога зашто су грешке направљене (Booth, 1988). На пример, многи ученици мисле да ће се вредност израза нужно променити ако се промени редослед операција, као у изразима $18 \cdot 27 + 19$ и $19 + 27 \cdot 18$. Слично, приликом израчунавања вредности израза $a - b + c$ ученици су тежили да „одвоје" знак минус и израчунају његову вредност као вредност израза a – (b + c) (Linchevski & Livneh, 1999). Међутим, идентификовање еквивалентних облика израза није немогућ задатак за ученике, али морамо бити свесни да они праве грешке које су последица неразумевања структуре израза (Chaiklin & Lesgold, 1984).

Моделовање и репрезентације у служби развијања значења математичких појмова

Важан задатак наставе математике јесте оправдавање синтаксичких манипулација, било да се изводе над аритметичким или алгебарским изразима. Математичке идеје су по природи апстрактне и без наглашавања њиховог значења ученици их неће разумети. Подршка за семантику синтаксичких манипулација може се наћи у контекстуалним проблемима (тј. процесу моделовања) и/или репрезентацијама (Cai, 2014; Chazan, 2000; Stylianou, 2011). Постоји много описа процеса моделовања, али свима је заједнички пут који води од реалне ситуације преко математичког модела до интерпретације и валидације резултата (Blum, 1994; Blum & Leiss, 2007; Sfard, 1991). Чак и ако се понекад може довести у питање „реалност" неких контекстуалних задатака, њихова дидактичка вредност је добро позната (Blum, 1994). Они дају ученицима прилику да истраже математичку структуру и тако подстичу алгебарско резоновање (Sfard, 1991; Steele & Johanning 2004). Детаљније, веза између реалне ситуације, с једне, и алгебарских односа, с друге стране, могла би се описати у три корака (Sfard, 1991):

1. прелазак из ситуације изражене природним језиком (текстуални проблеми) на алгебарски код;

2. анализа односа између промењивих, заснована на манипулацији алгебарским изразима (синтаксички ниво) и

3. интерпретација конкретних ситуација у светлу резултата рада са алгебарском синтаксом.

Значење је дато алгебарским изразима у првом кораку и синтаксичким манипулацијама у другом и трећем кораку. Дакле, супротно употреби текстуалних задатака традиционално, где ученици користе задате бројеве и изводе математичке операције како би добили нумерички резултат (Verschaffel et al., 2000), текстуални задаци могу се користити за изградњу значења манипулација математичким симболима.

Бројни аутори употребу различитих репрезентација за илустрацију проблемских ситуација сматрају важном компонентом алгебарског мишљења (Duval, 1999; Kabaca, 2013; Kieran, 1996; Rivera, 2010). Прелаз између различитих репрезентација доприноси концептуалном разумевању математичких односа (Dreyfus & Eisenberg, 1982; Ni et al., 2018). Алгебарско знање зависи од способности ученика да представљају изразе у различитим облицима (нпр. речи, нумерички симболи, графикони, дијаграми) (Panasuk & Beyranev, 2010). Претходна истраживања ставила су акценат на визуелне репрезентације, јер оне подстичу структурну концепцију, чинећи апстрактне идеје опипљивијим (Fagnant & Vlassis, 2013). Као један од визуелних приказа, схеме су репрезентације које су блиске цртежима које ученици праве током решавања текстуалних задатака и имају позитивне ефекте на решавање проблема у математици (Fagnant & Vlassis, 2013).

Методолошке основе истраживања

У теоријском делу овог рада истакли смо да трансформација нумеричких и словних израза има важну улогу у повезивању аритметике и алгебре и да би коришћење моделовања био ефикасан приступ за увођење еквиваленције израза. Општи циљ овог истраживања је испитивање ефеката коришћења различитих типова израза (нумеричких или словних) и различитих средстава за развијање значења и уопштавање правила која су у основи трансформације израза у еквивалентне облике. За потребе истраживања осмишљена су два наставна модула. У оба модула користили смо моделовање, али су типови израза и аргументација за еквивалентност израза различити. У овом раду постављамо два истраживачка питања: 1. *Да ли математичко моделовање утиче на постигнућа ученика у трансформисању израза у еквивалентне облике?* У оквиру овог питања разматрамо и утицај коришћења визуелних репрезентација и реторичких генерализација на разумевање поступка трансформације израза; 2. *Да ли апстрактност језика и коришћење алгебарског симболизма утичу на разумевање еквивалентности изражено кроз постигнућа ученика?*

Учесници ове студије били су ученици четвртог разреда (десет и једанаест година). Одабрали смо пригодни узорак ученика у оближњим школама са сличним програмима. Експеримент се одвијао у три школе. Учествовало је 148 ученика (шест одељења). Истраживање је имало три фазе. Прво смо спровели иницијални тест, а на основу статистичке анализе прикупљених података формирали смо три групе ученика: две које су биле укључене у експеримент (Е1 и Е2) и контролну (К). Друга фаза подразумевала је примену модула (М1 и М2) за ученике из експерименталних група Е1 и Е2. У трећој фази спровели смо завршни тест на све три групе (Е1, Е2 и К) и анализирали резултате.

Иницијално тестирање

Иницијалним тестом обухваћени су следећи аспекти знања које смо сматрали релевантним за истраживање:

1. реторичка формулација аритметичких правила и својства операција;

2. симболичка формулација аритметичких правила и својства операција;

3. рачунање вредности израза операцијама истог или различитог приоритета, употреба заграда у рачунању вредности израза и

4. оцењивање тачности процедурално израженог аритметичког правила (оцењивање се може извршити и на основу једнакости вредности израза).

Анализа варијансе је показала да не постоји значајна разлика међу групама на иницијалном тесту: F (2, 148)=0.327 p=0.722. Пост хок анализом, користећи Шефеов пост хок критеријум за значајност, показано је да нема значајних разлика ни по паровима група, што је приказано у Табели 1.

Табела 1. Шефеов пост хок критеријум у анализи варијансе.

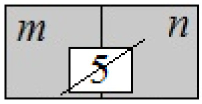
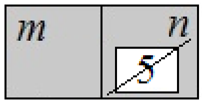
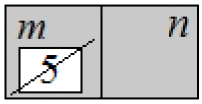
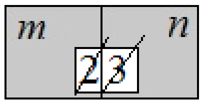
Група		Значајност
Е1	Е2	.727
	К	.968
Е2	Е1	.727
	К	.874
К	Е1	.968
	Е2	.874

У сврху истраживања дизајнирали смо два наставна модула. Група Е1 је учествовала у наставном модулу М1, а група Е2 у наставном модулу М2. У оба модула ученици су подстакнути да напишу еквивалентне изразе на основу текстуалног задатка. Оба модула спровео је исти истраживач у истој недељи и састојала су се од пет часова. Група К није добила никаква упутства за писање еквивалентних облика израза. Током недеље када су се наставни модули изводили у групама Е1 и Е2, група К је са својим наставницима радила на уобичајеним текстуалним задацима из уџбеника. Пре експеримента ученици су са својим учитељима обрадили сва правила аритметике и својства операција (током четири године). Током експерименталног програма ученици нису учили нова својства и користили су само знање стечено у претходном математичком образовању. Отуда је пет часова било довољно за моделовање свих врста еквивалентних израза са три члана у систему природних бројева. На овај начин бисмо могли одговорити да ли су групе Е1 и Е2, које су добиле упутства за писање еквивалентних израза у контексту текстуалног задатка, показале боља постигнућа од групе К у писању еквивалентних облика израза у другим контекстима.

У оба модула коришћена је иста методичка процедура. Након увођења и рекапитулације потребних појмова ученици су добили текстуалне задатке који су коришћени за моделовање еквивалентних израза. У модулу М1 аргументација је била ближа Крумхојеровој (Krummheuer, 2013) идеји о „дијаграмској аргументацији“. Укључивала је употребу дијаграма (ми ћемо их називати схемама) и симболичке изразе. У модулу М2 аргументација је била ближа „наративној аргументацији“ и обухватала је колективну аргументацију на основу претходних уопштавања ученика о правилима у скупу природних бројева. Како једно не искључује друго, у М1 је такође била присутна колективна аргументација. Метода рашчлањивања која је коришћена у обе групе била је бинарно рашчлањивање (Chaiklin & Lesgold, 1984). Бројеве смо користили као квазипроменљиве у изразима (Fuji & Stephens, 2001) тако да је пажња ученика била скренута на структуру израза, а не на израчунавање њихове вредности.

Модули М1 и М2 разликовали су се по типу израза и репрезентацијама које се користе у процесу моделовања. У модулу М1 коришћени су комбиновани бројевни/словни изрази (алгебарски записи). Схеме су представљене ученицима и коришћене су за развијање значења израза. На овај начин претпоставили смо да мани-

Табела 2. Примери коришћени у Модулу 1 (а) и Модулу 2 (б).

Текстуални задатак	Изрази	Схеме у М1 или реторичке генерализације у М2
a) Продавачица је имала две кутије са оловкама. У једној је било m оловака, а у другој n оловака. Продала је 5 оловака. Колико јој је оловака остало? (У свакој кутији има више од 5 оловака.)	$(m + n) - 5$	
	$m + (n - 5)$	
	$(m - 5) + n$	
	$(m - 2) + (n - 3)$	
б) У теретном возу било је 300 тона пшенице у једном и 200 тона пшенице у другом вагону. На првој станици истоварено је 100 тона. Колико је пшенице остало у возу?	(200 + 300) – 100 (200 – 100) + 300 200 + (300 – 100) (200 – 50) + (300 – 50)	Ако се од збира одузме број, исто је као да се тај број одузме од само првог или само од другог сабирка, или се тај број растави, па се део одузме од првог, а део од другог сабирка.

пулација симболима неће бити преурађена и семантички празна (Zeljić, 2015). Представићемо пример који се односи на сабирање и одузимање (Табела 2, пример а). Са ученицима се разговарало о свим ограничењима када су у изразима били присутни одузимање или дељење (на пример, за израз m + n – p, услови за писање еквивалентних израза били су n > p и m > p).

У модулу М2 коришћени су бројевни изрази (аритметички записи). Аргументација се заснивала на реторичким генерализацијама ученика у сваком задатку. Такође наводимо један парадигматски пример (Табела 2, пример б).

Финално тестирање

Успех ученика у разумевању трочланих еквивалентних израза мерио се и о њему се дискутовало кроз његову примену у различитим контекстима: контекст текстуалног задатка (Ding & Li, 2014; Gerofsky, 2009) и симболички контекст (Cerulli & Mariotti, 2001; Stacey & MacGregor, 1999). Задаци су приказани у Табели 3.

На завршном тесту коришћени су и алгебарски и бројевни изрази. Пре почетка теста истраживач је објаснио сваки задатак. Од 148 ученика, 138 је полагало тест и време је било ограничено на 45 минута. У групи Е1 било је 54 ученика, 41 у Е2 и 43 у К.

Резултати истраживања

Да бисмо анализирали резултате сваког задатка на завршном тесту и дискутовали о одговорима које су ученици дали, одговори ученика су категорисани у четири категорије:

- одговори са два еквивалентна израза или више њих;
- одговори са једним изразом;
- одговори са више од једног израза, али са грешком у структури израза и
- друго: без одговора и некатегорисани одговори (које истраживач није могао да сврста у неку од наведених категорија).

Табела 3. Задаци са финалноī ūесūа.

	Текстуални задатак	Симболички контекст
	Реши текстуални задатак на различите начине. Решење задатка представи изразом.	Запиши изразе који имају једнаку вредност датом изразу.
Т1	Продавац је на пијацу донео сир за продају у две кофе. У једној је било 28 кг, а у другој 32 кг сира. Продао је 8 кг сира. Колико кг сира је остало продавцу за продају?	С1 250 + 5 + 180 С2 250 – 5 + 150
Т2	У продавници кућних љубимаца налази се шест акваријума са по 120 рибица. Продавац жели те рибице да премести у три акваријума, тако да у сваком буде исти број. Колико ће рибица бити у сваком акваријуму?	С3 250 ÷ 10 ÷ 5
Т3	У аутобусу се вози 60 путника. На станици је на предњим вратима изашло 12, а на задњим 22 путника. Колико је путника остало у аутобусу?	С4 $a \cdot b \cdot c$
Т4	Маријана је у једном џепу имала m бомбона, а у другом n. Марини је дала 5 бомбона. Колико је бомбона остало Маријани?	С5 $e - 5 - g$
Т5	Петра је торту масе *x* килограма поделила на два дела, па је сваки од преосталих делова поделила на још 4 дела. Колика је маса сваког тако добијеног парчета торте? Да ли је Петра могла да подели торту на још неки начин?	С6 $h \cdot i \div 2$

Представљамо проценат одговора ученика у свакој од категорија на сваком задатку (Табела 4).

Табела 4. Проценат ученичких одговора у категоријама на сваком задатку.

		W1	W2	W3	W4	W5	S1	S2	S3	S4	S5	S6
E1	два или више израза	37.0	22.2	42.6	46.3	11.1	77.8	26	22.3	85.2	18.5	44.4
	један израз	22.2	44.5	29.6	18.5	42.6	9.2	12.9	11	5.5	4	13
	грешка у структури	1.9	3.7	16.7	13	29.6	0	46.3	50	0	63	24.1
	друго	38.9	29.6	11.1	22.2	16.7	13	14.8	16.7	9.3	14.8	18.5
E2	два или више израза	53.7	36.6	65.9	46.3	29.3	87.8	51.2	43.9	85.4	26.8	36.6
	један израз	12.2	31.7	19.4	17.1	26.8	2.4	0	2.5	0	12.2	2.4
	грешка у структури	2.4	7.3	9.8	14.6	14.6	0	39	34.1	0	61	36.6
	друго	31.7	24.4	4.9	22.0	29.3	9.8	9.8	19.5	14.6	12.2	24.4
K	два или више израза	27.9	25.6	44.2	13.9	21	65.1	18.7	21	62.8	9.3	18.7
	један израз	48.8	39.5	55.8	37.2	41.9	11.6	20.9	18.6	14.0	11.6	30.2
	грешка у структури	0	2.3	0	4.7	0	0	25.6	16.3	0	46.5	16.3
	друго	23.3	32.6	11.6	44.2	37.2	23.2	34.9	44.2	23.3	32.6	34.9

За статистичку анализу користили смо Фишер–Фриман–Халтонов тест (Fisher–Freeman–Halton). За утврђивање статистичке значајности коришћена је пост хок анализа са Бонферонијевим корекцијама (Bonferroni-correction) (p<.017). За статистичку обраду података коришћен је програм SPSS.

Резултати показују да постоји значајна разлика у постигнућима између експерименталних група и контролне групе у свим задацима осим у задатку Т2, док разлика између постигнућа ученика у експерименталним групама није значајна (Табела 5).

Табела 5. Фишер–Фриман–Халтонов тест и пост хок поређења између експерименталних група.

Задатак	Значајност разлика између Е1, Е2 и К	Значајност разлике пост хок поређења између Е1 и Е2
Т1	$p = .008$	$p = .209$
Т2	$p = .176$	
Т3	$p = .001$	$p = .265$
Т4	$p < .001$	$p = .920$
Т5	$p < .001$	$p = .045$
С1	$p = .024$	$p = .038$
С2	$p < .001$	$p = .031$
С3	$p < .001$	$p = .051$
С4	$p = .005$	$p = .436$
С5	$p = .004$	$p = .075$
С6	$p = .001$	$p = .071$

Изузетно важни подаци за нашу анализу јесу проценат ученика који су написали два еквивалентна израза или више њих као решење задатака и проценат ученика који су направили структурне грешке у писању еквивалентних облика израза, па ћемо их графички приказати (График 1 и График 2).

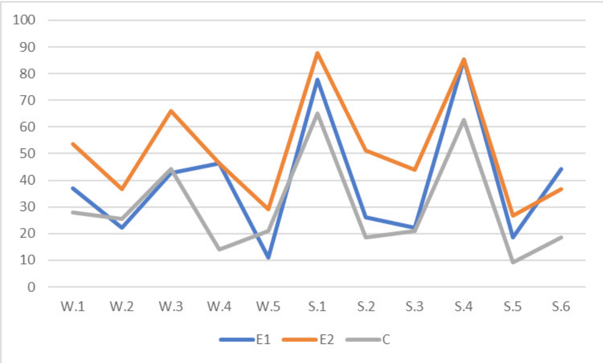


График 1. Проценат ученика који су написали два еквивалентна израза или више њих.

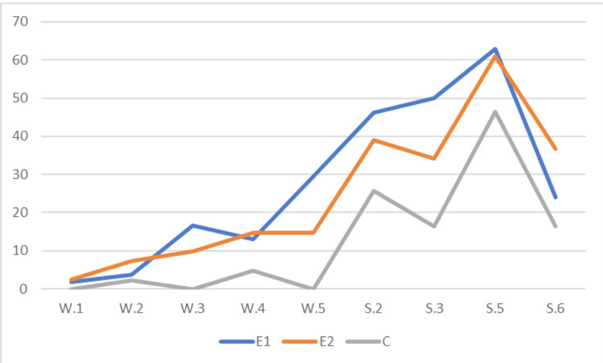


График 2. Проценат ученика који су направили структурне грешке у писању еквивалентних облика израза.

Дискусија о резултатима истраживања

Претходна истраживања показала су да ученици виших разреда основне школе могу да буду успешни у оцењивању еквивалентних форми израза, уз запажање да им то није лак задатак и да при томе праве различите грешке у структури израза (Chaiklin & Lesgold, 1984; Liebenberg et al., 1999; Linchevski & Livneh, 1999; Livneh & Linchevski, 2007). У нашем истраживању млађи ученици на крају првог циклуса образовања добили су инструкцију у којој су кроз процес моделовања објашњене еквивалентне форме израза. Претходна истраживања истакла су значај процеса моделовања у математичком образовању (Blum & Leiss, 2007; Sfard, 1991; Steele & Johanning, 2004), посебно у грађењу значења математичких записа и симбола. Постојање статистички значајних разлика између експерименталних и контролне групе (Табела 5) показује да процес моделовања може позитивно утицати на изграђивање значења и разумевање еквивалентних форми израза. Уколико размотримо проценат ученика који је на постављени задатак тачно написао два еквивалентна израза или више њих (График 1), можемо видети да су ученици који су били у експерименталним групама у већем проценту писали два еквивалентна израза или више њих, без обзира на то да ли се радило о текстуалним задацима (Т1 – Т5) или симболичким задацима (С1 – С6). Они су такође могли да оставе изразе „незавршеним", као и да увиде да изрази могу бити решење задатка (Subramaniam & Banerjee, 2004; Fuji & Stephens, 2001; Linchevski & Livneh, 1999). То показује да су млађи ученици способни да изразе прихвате као математичке објекте, а не само као процесе (Sfard, 1991; Kieran, 1992). Ученици су у највећем броју написали два еквивалентна израза или више њих у симболичком контексту када су одговарали на ставке које су означавале асоцијативне законе (задаци С1 и С4). Тај резултат је очекиван јер су ови закони били наглашавани у њиховом претходном школовању. Резултати говоре у прилог томе да је коришћење бројевних израза и могућност њиховог разумевања као математичког објеката, а не само као процеса рачунања, могуће у почетној настави. Како је еквиваленција израза фундаменталан појам за развијање алгебарског мишљења, његово увођење у програм математике за почетну наставу је оправдано и пожељно. Представљање појмова помоћу бројевних израза и коришћење генерализација резултирало је високом успешношћу ученика. Са друге стране, визуелизација и наслањање значења трансформација алгебарских израза резултирало је такође високом успешношћу ученика (Fagnant & Vlassis, 2013; Panasuk & Beyranev, 2010; Sfard, 1991). Представљање појмова и поступака кроз различите репрезентације (у нашем случају текстуалне задатке, схеме, реторичке генерализације и симболе) и повезивање тих репрезентација утицало је на способност ученика да уоче и запишу већи број еквивалентних облика израза (Cai, 2014; Chazan, 2000; Dreyfus & Eisenberg, 1982; Ni et al., 2018; Stylianou, 2011).

Пост хок анализа између групе Е1 и Е2 (Табела 5) показала је да не постоји статистичка значајна разлика између ученика који су били подучавани помоћу словних или помоћу бројевних израза, што је у супротности са резултатима истраживања који су разматрани у теоријским основама: 1. ученици ће бити успешнији када раде са бројевним изразима (Linchevski & Livneh, 1999; Livneh & Linchevski, 2007); 2) алгебарски језик као начин изражавања генерализације препрека је у учењу (Crowley et al., 1994; Linchevski & Livneh, 1999; Malara & Iaderosa, 1999; Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994) и 3) структурно схватање израза и једнакости проблем је и за знатно старије ученике (Crowley et al., 1994; Kieran, 2004; Linchevski & Livneh, 1999; Kieran, 1996; Malara & Iaderosa, 1999; Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994). Ученици су подједнако добро разумели: а) једнакост словних израза када је значење еквиваленције било утемељено представљањем односа коришћењем схема и б) једнакост бројевних израза када је значење еквиваленције било утемељено кроз реторичко уопштавање односа који су изражени кроз манипулацију бројевним изразима. Сматрамо да су ученици који су током експеримента радили на трансформацији словних израза апстрактност језика премостили тако што су користили схеме као носиоце значења, а ученици који су радили на трансформацији бројевних израза уопштавали су своје поступке реторичким генерализацијама. Оба модула су показала једнаку успешност, што имплицира да процес моделовања у коме се користе текстуални задаци као полазна основа и оквир значења трансформације јесте ефикасан методички поступак за развијање значења и примену правила аритметике (Carraheret et al., 2008; Sfard, 1991; Steele & Johanning, 2004). Можемо потврдити и став да коришћење вишеструких репрезентација различитих нивоа апстрактности поспешује развијање алгебарских појмова и алгебарског мишљења (Cai, 2014; Chazan, 2000; Duval, 1999; Kabaca, 2013; Kieran, 1996; Rivera, 2010; Stylianou, 2011)

Иако би било очекивано да ученици који су подучавани коришћењем словних израза буду успешнији на задацима који их садрже, у нашем истраживању то није случај. На групи задатака који садрже словне изразе (Т4, Т5, С4, С5, С6) успешност у писању два или више израза идентична је на задацима Т4 и С4 (Табела 4), док је на задацима Т5 и С5 успешност групе која је подучавана помоћу бројевних израза већа (Табела 4), што је у супротности са досадашњим истраживањима (Cerulli & Mariotti, 2001; Malara & Iaderosa, 1999; Stacey & MacGregor, 1999). Овај резултат показује да успешност ученика у трансформацији словних израза зависи од суштинског разумевања значења правила (Booth, 1988; Lee & Wheeler, 1989; Malara & Navara, 2001), а не искључиво од средстава којима се генерализације исказују (Booth, 1988; Blanton & Kaput, 2005; Kieran, 2004; Lee & Wheeler, 1989; Malara & Navara, 2001).

Међутим, број структуралних грешака које су ученици правили после експерименталног програма (График 2) већи је од броја грешака контролне групе. Сматрамо да су ученици експерименталних група разумели да изразе можемо трансформисати у еквивалентне форме и да су, у покушају да напишу што већи број еквивалентних израза, испољили неразумевање структуре скупа природних бројева. Разлог томе видимо у временском трајању експеримента. Насупрот томе, ученици контроле групе углавном нису писали више од једног еквивалентног израза, а тај један је био заснован на редоследу рачунских операција, тј. у њему су заградама означавали редослед операција израза који је дат без заграда.

Још један интересантан резултат може се добити поређењем процента структуралних грешака на текстуалним и симболичким задацима. Са Графика 2 може се видети да грешке у контексту текстуалног задатка јесу у интервалу 0–30%, док су у симболичком контексту у интервалу од 18–65%. Дакле, далеко је већи број грешака које су ученици направили у симболичком контексту. Број структурних грешака је значајно већи и на задацима са бројевним изразима у симболичком контексту у односу на текстуалне задатке. То показује да и у ситуацији када ученици могу израчунавањем да провере тачност једнакости, број грешака расте када не постоји контекст и значење на које се наслањају трансформације (Banerjee, Subramaniam & Naik, 2008; Booth, 1988; Linchevski & Livneh, 1999; Subramaniam & Banerjee, 2004). Ово има значајне импликације. Ученици су контекст текстуалног задатка прихватили као оквир за изражавање значења еквивалентних израза, тако што су ситуацију описану текстом сагледавали на различите начине пишући еквивалентне изразе који одговарају одређеним правилима аритметике. То значи да се само значење аритметичког правила може утемељити помоћу текстуалних задатака. Ученици млађег узраста спремни су да записују еквивалентне форме израза када им је дат контекст и значење путем слике или текста (Cai, 2014; Chazan, 2000; Panasuk & Beyranev, 2010; Stylianou, 2011). Уколико се симболи прерано одвоје од основе која даје значење симболичким манипулацијама, ученици могу испољавати преурањену формализацију и тада језик симбола постаје семантички празан.

Закључак

Резултати истраживачких питања која смо поставили у нашем раду показују да су ученици нижих разреда (у доби од десет до једанаест година) у стању да развију разумевање еквиваленције израза, било да су они аритметички (бројевни) или алгебарски (словни). Детерминишући фактор успеха у трансформацијама еквивалентних израза није питање алгебарског и аритметичког језика, већ развијање значења односа кроз процес моделовања и друге репрезентације. То значи да процес моделовања у настави не треба користити искључиво као оквир за решавање текстуалних проблема, већ и за развијање значења алгебарских појмова као што је еквиваленција израза. Помоћу процеса моделовања већи број ученика је бројевни израз видео као објекат, а не само као процес, што је од изузетне важности у преласку са аритметике на алгебру. Иако су у светлу претходних истраживања коришћене визуелне репрезентације које дају значење алгебарским изразима, односно реторичке генерализације за апстраховање бројевних израза, структуралне грешке које су ученици правили у писању еквивалентних израза потврдиле су да ученици на завршетку првог циклуса образовања имају процедурално разумевање операција у скупу природних бројева. Мањи број грешака који су правили пишући еквивалентне изразе на текстуалним задацима видимо као још једну предност коришћења моделовања у сврху писања еквивалентних израза. Добро одабрани реалистични контекст даје ученицима могућност да истражују и проширују знања о својствима скупа природних бројева.

Литература

- Banerjee, R., Subramaniam, K. & Naik, S. (2008). Bridging Arithmetic and Algebra: Evolution of a Teaching Sequence. In: Fogueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano T. & Sepulveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32, Vol. 2* (121–128). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.
- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36 (5), 412–446.
- Blum, W. (1994). Mathematical modeling in mathematics education and instruction. In: Breiteig, T., Huntley, I. & Kaiser-Messmer, G. (Eds.). *Teaching and learning mathematics in context* (3–14). Chichester, England: Ellis Horwood Limited.
- Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In: Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Eds.). *Mathematical modeling: Education, engineering, and economics* (222–231). Chichester: Horwood.
- Booth, L. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In: Coxford, A. F. (Ed.). *The Ideas of Algebra. K-12* (20–32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cai, J. (2014). Searching for evidence of curricular effect on the teaching and learning of mathematics: Some insights from the LieCal project. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 811–831.
- Cerulli, M. & Mariotti, M. A. (2001). Arithmetic & Algebra, Continuity or Cognitive Break? The Case of Francesca. In: Van-den Heuvel Pannhueizen, M. (Ed.). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (225–232). Utrecht, Netherlands: PME.
- Chaiklin, S. & Lesgold, S. B. (1984). *Prealgebra Students' Knowledge of Algebraic Tasks with Arithmetic Expressions.* Retrieved May 20, 2020. from www: https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a144672.pdf
- Chazan, D. (2000). *Beyond formulas in mathematics and teaching: Dynamics of the high school algebra classroom*. New York, NY: Teachers College Press.
- Crowley, L., Thomas, T. & Tall, D. (1994). Algebra, Symbols, and Translation of Meaning. In: Ponte, J. P. & Matos, J. F. (Eds.). *Proceedings of PME 18* (240–247). University of Lisbon, Portugal.
- Ding, M. & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representation: the distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics,* 87, 103–121.
- Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13 (5), 360–380.
- Duval, R. (1999). Representation, vision & visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: Hitt, F. & Santos, M. (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (3–26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- Fagnant, A. & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 149–168.
- Fuji, T. & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalization trough numerical expressions: the role of quasi-variables. In: Chick, H., Stacey, K. & Vincent, J. (Eds.). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching & Learning of Algebra, Vol. 1* (258–264). Melbourne: The University of Melbourne.
- Gerofsky, S. (2009). Genre, simulacra, impossible exchange, & the real: How postmodern theory problematizes word problems. In: Verschaffel, L., Greer, B. & Dooren, W. V. (Eds.). *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (21–38). Rotterdam: Sense Publishing.

- Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59–78.
- Ilić, S., Zeljić, M. (2017). Pravila stalnosti zbira i razlike kao osnova strategija računanja. *Inovacije u nastavi*, 30 (1), 55–66.
- Kabaca, T. (2013). Using Dynamic Mathematics Software to Teach One-Variable Inequalities by the View of Semiotic Registers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 9 (1), 73–81.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching & learning* (390–419). New York: Macmillan.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In: Alsina, C., Alvares, J., Hodgson, B., Laborde, C. & Pérez, A. (Eds.). *ICME 8: Selected lectures* (271–290). Seville, Spain: S. A. E. M. „Thales".
- Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8 (1), 139–151.
- Kieran, C., Boileau, A., Tanguay, D. & Drijvers, P. (2013). Design researchers' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions. *ZDM Mathematics Education*, 45, 1045–1056.
- Lee, L. & Wheeler, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies Mathematics*, 20, 41–54.
- Liebenberg, R. E., Linchevski, L., Sasman, M. C. & Olivier, A. (1999). Focusing on the structural aspects of numerical expressions. In: Kuiper, J. (Ed.). *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics & Science Education* (249–256). Harare, Zimbabwe.
- Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173–196.
- Lins, R. & Kaput, J. (2001). The Early Development of Algebraic Reasoning: The Current State of the Field. In: Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. & Vincent, J. (Eds.). *The Future of the Teaching & Learning of Algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (47–70). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.
- Livneh, D. & Linchevski, L. (2007). Algebrification of Arithmetic: Developing Algebraic Structure Sense in the Context of Arithmetic. In: Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (217–224). Seoul: PME.
- Malara, N. & Navarra, G. (2001). „Brioshi" & other mediation tools employed ina teaching of arithmetic from a relational point of view with the aim of approaching algebra as a language. In: Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. & Vincent, J. (Eds.). *The Future of the Teaching & learning of Algebra*, *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (412–419). Melbourne: University of Melbourne.
- Malara, N. & Iaderosa, R. (1999). The interweaving of arithmetic and algebra: Some questions about syntactic and structural aspects and their teaching and learning. In: Schwank, I. (Ed.). *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Vol. 2* (159–171). Osnabrueck: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik.
- Ni, Y., Zhou, D. R., Cai, J., Li, X., Li, Q. & Sun, I. X. (2018). Improving cognitive and affective learning outcomes of students through mathematics instructional tasks of high cognitive dem. *The Journal of Educational Research*, 111 (6), 704–719.
- Panasuk, R. M. & Beyranev, M. L. (2010). Algebra students' ability to recognize multiple representations and achievement. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 22, 1–22.
- Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (3), 297–328.

- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 1–36.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26 (2/3), 15–39.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (1999). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2), 149–167.
- Steele, D. & Johanning, D. J. (2004) A Schematic-theoretic View of Problem Solving and Development of Algebraic Thinking. *Educational Studies in Mathematics,* 57, 65–90.
- Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Toward an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 76 (3), 265–280.
- Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expressions. In: Johnsen Hoines, M. & Berit Fuglestad, A. (Eds.). *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (121–128). Bergen: PME.
- Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The Arighmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. In: Cai, E. & Knuth, J. (Eds.). *Early Algebraization* (87–107). Berlin-Heidelberg: Springer.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets and Zeitlinger.
- Zeljić, M. (2015). Modelling the Relationships between Quantities: Meaning in Literal Expressions. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11 (2), 431–442.

Summary

The notion of expression equivalence is one of the terms that has been recognized in the literature as key to understanding algebraic ideas. To understand this term, the context used as a basis for developing meaning is important, as well as the language in which generalizations are expressed. The aim of this paper is twofold: a) to examine whether the context of a textual task and modeling activities influence the understanding of the transformation of expressions into equivalent forms; b) determine whether the understanding of the equivalence of the expression is affected by the level of abstractness of the expression (algebraic or arithmetic). The research is of a quasi-experimental design with two experimental groups and one control group. The sample consists of 148 fourth-graders. The existence of statistically significant differences between the students of the experimental groups and the control group suggests that the modeling process influences the development of the notion of expression equivalence. This research did not show any differences in the results of the students who were taught using algebraic or arithmetic expressions. This implies that the understanding of equivalence developed through the modeling process is not related to the level of abstractness of the mathematical language used, but that, based on understanding the meaning of the term, students can transform arithmetic and algebraic expressions with equal success.

***Keywords**: equivalence of mathematical expressions, modeling, mathematical symbolism, algebra.*